Pour prendre un bon départ : le second degré

Exercice 1

Considérons plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

- **Forme 1** : $f(x) = 4(x-5)^2 - 9$
- **Forme 2** : $f(x) = (2x-13)(2x-7)$
- **Forme 3** : $f(x) = 4x^2 - 40x + 91$

1. Montrer que les formes 1 et 2 sont égales à la forme 3.
2. Quelle est la forme factorisée de $f(x)$? Quelle est la forme développée de $f(x)$?
3. Compléter les colonnes du tableau ci-dessous pour répondre aux questions posées.

Question	Forme	Solution(s)
Résoudre l'équation $f(x) = 0$		
Calculer $f(0)$		
Déterminer les antécédents de -9 par f		
Calculer l'image de $\sqrt{2}$ par f		
Résoudre l'équation $f(x) = 91$		

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $6x^2 - 10x = 0$

2. $x^2 - 14x + 49 = 0$

3. $x^2 - 13 = 0$

4. $(x-2)^2 - 9 = 0$

5. $-(x+5)^2 = 16$

6. $x^2 + 4 = 0$

7. $x^2 - 4 = 0$

8. $3x^2 + 4 = 0$

9. $3x^2 - 6x + 3 = 0$

10. $(x+1)^2 = (2x-1)^2 - 3x$

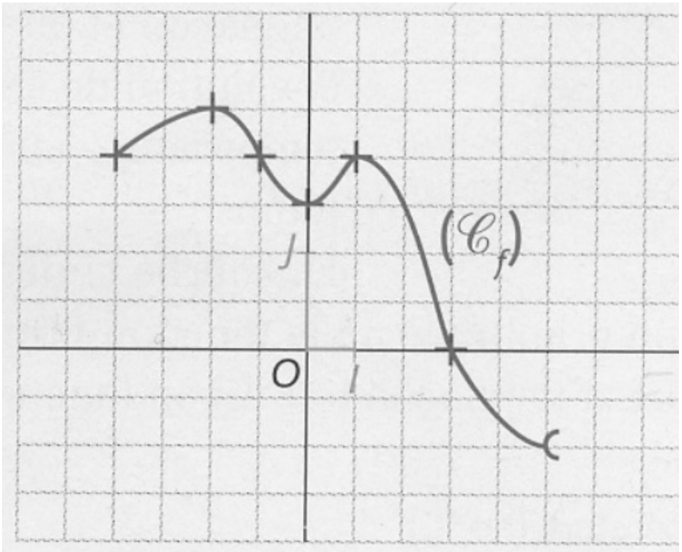
11. $(x+1)^2 + 5x + 5 = 0$

12. $3x^2 = 12$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $6x^2 > 0$
2. $-4x + 5 < 0$
3. $x^2 < 0$
4. $(x + 6)(2x + 3) \leqslant 0$
5. $x(x + 3) < 0$
6. $(x + 10)^2 - 4 \geqslant 0$
7. $-3x^2 + 6x \geqslant 0$
8. $-3x^2 + 6x < 0$
9. $x^2 - 14x + 49 \leqslant 0$

Exercice 4
La courbe représentative d'une fonction f est donnée dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ ci-dessous. Les réponses aux questions seront obtenues par lecture graphique.



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

3. Quels sont les éventuels antécédents de 0 par f ? De 2 par f ?
4. En expliquant brièvement la méthode, résoudre graphiquement les deux équations suivantes (utiliser la courbe donnée pour mettre en évidence avec des couleurs votre méthode de résolution graphique) :
   - $f(x) = 3$
   - $f(x) = \dfrac{5}{2}$
5. Donner l'ensemble des valeurs du réel m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ possède :
   - 3 solutions ?
   - 2 solutions ?

Exercice 5

Le tableau ci-dessous donne les variations d'une fonction f définie sur $[-3;4]$.

x	-3		-2		1		4
$f(x)$	5	↘	0	↗	2	↘	-5

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse, ou bien si les renseignements sont insuffisants pour conclure.

1. $A(1;2)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$

2. $B(2;1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$

3. $f(-2,5) > 0$

4. $f(3) > 0$

5. f est positive ou nulle sur $[-3;1]$

6. f est strictement croissante sur $[0;2]$

7. La courbe représentative de f et l'axe des abscisses ont deux points communs

8. Si $x \in]-3;1[$ alors $f(x) \in [0;5[$

Exercice 6

Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-1	↗	5

1. Donner l'image de 0 par f.
2. Que dire des extrema de f sur l'intervalle $[-1;4]$? Et sur $\mathbb{R}$? Donner un intervalle où -1 est le minimum et un intervalle où 4 est le maximum.
3. Sachant que le réel x est compris entre -5 et -2, comparer leurs images en justifiant votre réponse.
4. Peut-on affirmer que l'image d'un nombre compris entre 0 et 2 est positive ? Justifier.

Exercice 7

Donner, en justifiant soigneusement, l'ensemble de définition des fonctions dont l'expression est :

1. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-16}$

2. $g(x) = \dfrac{x\sqrt{1-x}}{2}$

Exercice 8

La trajectoire d'un objet dans l'air est donnée par $f(t) = -5t^2 + 12t + 9$, où t est le temps écoulé (en secondes) depuis le lancer et $f(t)$ la hauteur de l'objet à l'instant t (en mètres).

1.(a) Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Exprimer par une phrase ce que signifient ces résultats.

(b) En gardant bien à l'esprit ce que représente $f(t)$, donner l'ensemble de définition de f.

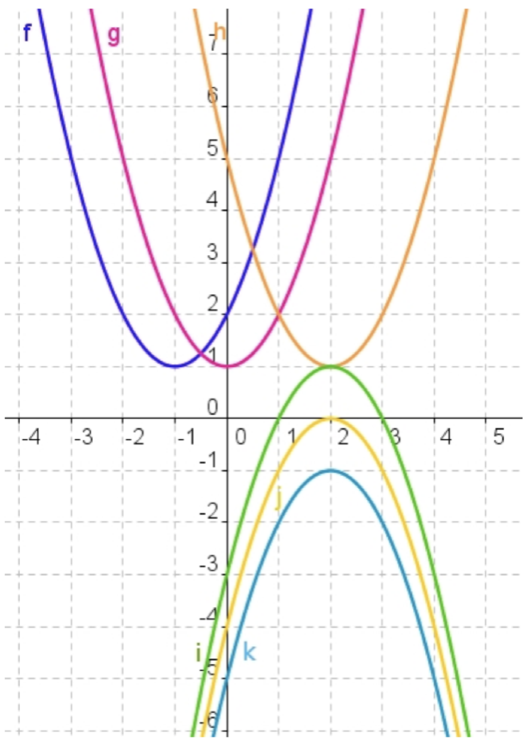
2. Représenter la fonction f sur votre calculatrice et donner un tableau de valeur pour x allant de 0 à 3 avec un pas de 0,2. Conjecturer sur le maximum de f.
3. Á l'aide de la touche « G-solve » retrouver le maximum de f.
4. En déduire après combien de secondes la hauteur maximale est atteinte.

Exercice 9
On souhaite établir le tableau de valeurs d'une fonction f. Pour cela, on propose le script ci-dessous :

```python
def f(x) :
    return -x**2-2*x+2
for i in range(9):
    x=-4+i*0.5
    y=f(x)
    print(x,y)
```

1. Écrire ce script sur le site « repl.it » (qui permet de programmer en ligne avec le langage Python). Mettre dans un tableau les résultats obtenus.
2. Que fait cet algorithme ? Donner l'expression de f et vérifier à l'aide de la calculatrice graphique les résultats obtenus à la question précédente.

Exercice 10
Associer les courbes aux expressions des fonctions polynômes :

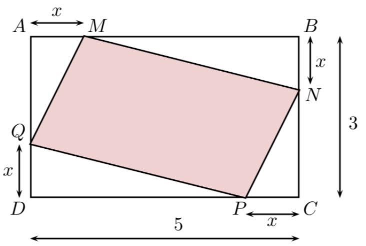


a. $(x+1)^2+1$ **b.** $-(x-2)^2+1$ **c.** x^2+1

d. $-(x-2)^2$ **e.** $-(x-2)^2-1$ **f.** $(x-2)^2+1$

Exercice 11

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 5$ et $BC = 3$.
On considère respectivement les points M, N, P et Q des segments $[AB]$, $[CD]$, et $[DA]$ tels que :
$AM = BN = CP = DQ = x$ (avec x un réel compris entre 0 et 3).
L'unité de longueur est le centimètre.



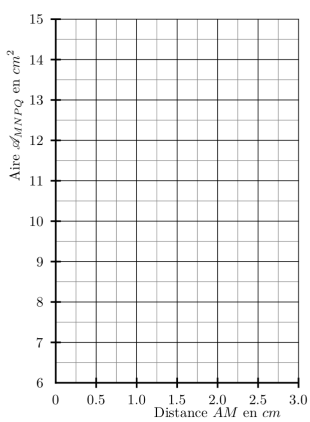
On s'intéresse à $\mathcal{A}_{MNPQ}$ l'aire du quadrilatère $MNPQ$ et on se pose les questions suivantes :

- L'aire $\mathcal{A}_{MNPQ}$ admet-elle un minimum, un maximum ?
- Comment varie $\mathcal{A}_{MNPQ}$ lorsque x varie ?
- Quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{A}_{MNPQ}$ et x ?

1. A l'aide du logiciel de géométrie GeoGebra, construire la figure.
2. Afficher l'aire du quadrilatère $MNPQ$.
3. Déplacer M sur le segment $[AB]$:
   (a) Comment semble varier l'aire de $MNPQ$?
   (b) Émettre des conjectures concernant les valeurs maximale et minimale de l'aire de $MNPQ$.
4. On souhaite représenter graphiquement l'aire de $MNPQ$ en fonction de la distance AM.
   (a) Construire le point R d'abscisse la distance AM et d'ordonnée l'aire de $MNPQ$.
   Pour cela il suffit de taper $R =$(Distance(A, M),Aire(M, N, P, Q)) dans le champ de saisie.
   (b) Activer la trace de R puis déplacer M sur le segment $[AB]$.
   Observer la courbe qui se dessine point par point.
5. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

Distance AM (en cm)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Aire $\mathcal{A}_{MNPQ}$ (en cm^2)							

6. Représenter graphiquement l'aire de $MNPQ$ en fonction de la distance AM dans le repère ci-dessous :



7. Exprimer $\mathcal{A}_{MNPQ}$ en fonction de x